F. PEREZ PAREJA

El método marginalista antes de AA. Cournot

Uno de los aspectos más significativos del pensamiento económico y en general, de cualquier análisis científico, es la búsqueda de principios generales y unificadores que engendren una lógica, lo más amplia posible, y un sistema de pensamiento que permita llegar de una manera profunda y sistemática a la comprensión de las más diversas cuestiones científicas.

El análisis marginalista no es sino el resultado de los esfuerzos del pensamiento científico en la búsqueda y elaboración de un método general que permita, de una forma ordenada, tratar el problema de obtener el mayor provecho posible de los recursos limitados de un sistema económico, o lo que es equivalente, obtener algo deseado con la menor cantidad posible de recursos. Evidentemente, este problema necesita un aparato formal, un lenguaje y, nada tiene de extraño que el marginalismo en sus comienzos, encontrara en la lógica del cálculo infinitesimal, particularmente en la teoría de los extremos locales de una función, el método básico y técnicamente adecuado para el planteamiento y solución de esta cuestión. De esta forma, se elabora una síntesis armónica entre una serie de principios psicológicos y los métodos de cálculo que constituyen la esencia misma del pensamiento marginalista.

En este sentido, el Profesor Schumpeter considera que "desde el punto de vista técnico, las 'nuevas' teorías del valor y de la distribución se reducían realmente al descubrimiento del cálculo infinitesimal como instrumento de la economía. Y esto basta para mostrar lo absurda que es cualquier oposición de principio al 'marginalismo'"[1]. Y en el mismo

1. SCHUMPETER, J.A. *History of Economics Analysis,* Oxford University Press, 1954. Existe versión castellana bajo el título *Historia del Análisis Económico,* Edit. Ariel., pp. 1.042, Not. 6.

sentido, el Profesor Sackle considera lo siguiente: "El marginalismo fue la fusión de dos ideas perfectamente adaptadas la una a la otra. En efecto, el resultado fue una sola idea de tal ascendente que toda la teoría económica dependió de la misma durante más de 50 años. Una de estas ideas era un hecho de la observación que resolvía el problema de la determinación económica. La otra era el criterio matemático clásico para la determinación de los valores numéricos del argumento de una función que se corresponden con los valores extremos de la función"[2].

Resulta claro que el análisis marginal, cuya esencia consiste en hacer un análisis en el margen, es decir, en la frontera, tratando de determinar los efectos que sobre ciertas magnitudes producen los cambios de otra, dejó el camino abierto al cálculo infinitesimal y, durante muchos años, éste se convirtió en el dueño y señor del análisis económico. Sólo muy recientemente se han introducido otros instrumentos, particularmente matemáticas finitas, para la solución de estos problemas.

Cabe, pues, preguntarse cuándo y cómo aparecen los métodos infinitesimales en el pensamiento científico y, sobre todo, cuándo y cómo penetran en el cuerpo de la teoría económica, pues esto constituirá el comienzo del marginalismo. La primera cuestión es, evidentemente, objetivo de la historia del pensamiento matemático y sólo acudiendo a ella es posible contestarla.

En efecto, es bien sabido que el extraordinario desarrollo experimentado por la astronomía y la física desde mediados del siglo XVI hasta finales del XVII, concretamente desde Copérnico a Newton, va mostrando cada vez con más intensidad que la matemática de magnitudes constantes resultaba inadecuada para el tratamiento de los nuevos problemas científicos. En pleno siglo XVI, el problema central de los físicos es el análisis del movimiento, ligado a la gran figura de Galileo que sienta las bases de la mecánica. Con el estudio del movimiento se introduce el concepto de cambio y como reflejo de las propiedades generales de aquél aparece en matemáticas la idea de magnitud variable y de función, cuyo desarrollo determinó una matemática de magnitudes variables. De esta forma, el concepto de función aparecerá como la "imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra"[3]. Con estos conceptos se desarrolla el análisis matemático cuyos puntos de apoyo serán, por un lado, el conjunto de materiales suministrados por la mecánica y, por otro, los problemas de la geometría y el álgebra.

En primer término tuvo lugar el nacimiento de la geometría analí-

2. SHACKLE, G.L.S., *Epistemics and Economics. A Critique of Economic Doctrines*, Cambridge University Press, 1972, pp. 243.

3. Ver ALEKSANDROV, A.D.; KOLMOGOROV, A.N.; LAURENTIEV, M.A. y otros, *La Matemática*, Ed. Alianza, Madrid 1973. Vol. I, pp. 65-66.

tica que va ligado a dos grandes pensadores franceses: Renato Descartes (1956-1650) y P. de Fermat (1601-1655). En efecto, el método de las coordenadas que tuvo lugar en 1637, con la aparición de la "Geometría" de Descartes, jugará un papel decisivo en la elaboración de los métodos infinitesimales; pues el cálculo diferencial tuvo su nacimiento con la solución de un problema geométrico, a saber, la determinación de la tangente a una curva dada en un punto de ella. Y, en este sentido, el concepto de derivada no se formuló hasta el siglo XVII, precisamente cuando Fermat en el análisis de ciertas funciones, observó que la localización de sus valores extremos se reducía a encontrar las tangentes horizontales a sus curvas. Si este problema de la derivada se introduce con un problema geométrico de tangentes, no se tarda en observar que proporcionaba un instrumento eficaz para el estudio de los movimientos no uniformes y, de esta forma, resultó que el estudio de estos movimientos y la determinación de la dirección de la tangente a una curva de un punto aparecen íntimamente relacionados. Y, esta relación que permitió conectar un problema de mecánica con un problema geométrico, fue descubierta gracias a la posibilidad de la representación gráfica de la dependencia de una variable con respecto a otra; es decir, del concepto de función.

La otra rama del cálculo, el llamado cálculo integral, también nació ligado a un problema geométrico, el llamado problema de las cuadraturas que en esencia consistía en la determinación del área encerrada por una curva dada. Nace, por tanto, con el intento de calcular áreas limitadas por curvas y volúmenes limitados por superficies curvas y, sus orígenes más remotos se pierden en la antigüedad griega con el llamado método de exhaución, inventado por Eudoxo (S. V a J.C.) para determinar el volumen de la pirámide. Y, este método, será convertido por Arquímedes en un poderoso instrumento que contiene los gérmenes del cálculo integral.

Un hecho interesante es que a primera vista parece que no existe una conexión entre el método de las tangentes y el de las cuadraturas, sin embargo, mientras la diferenciación nos da la dirección de la tangente en cualquier punto de una curva cuya ecuación se conoce, el problema inverso, esto es, determinar la ecuación de la curva, cuando se conoce la dirección de su tangente, resultó ser matemáticamente equivalente al proceso aparentemente heterogéneo de la integración y, de esta manera, se elaboró un método general de cálculo integral. El primero que parece percibir la conexión entre estas dos líneas de pensamiento resultó ser el maestro de Newton, Isaac Barrow (1630-1677) que de esta forma puede ser considerado como uno de los grandes precursores de los métodos infinitesimales. Sin embargo van a ser I. Newton (1642-1727) y J.W. Leibniz (1646-1716), los que apreciaron la verdadera importancia de esta conexión y la explotaron en forma tal que, en sus manos, los nuevos métodos unificados, inauguraron una nueva etapa en el desarrollo del cálculo.

En efecto, estos dos problemas geométricos tienen sus equivalentes mecánicos, pues hallar el ritmo de variación de una variable cuando se conoce una relación funcional de ella, no es otra cosa que la diferenciación. Pero, hallar la relación funcional de la variable cuando se conoce su ritmo de variación es el problema inverso de integración. Resulta entonces claro que para configurar las leyes básicas de la mecánica se necesitaba un conocimiento profundo de esta conexión y, de esta forma, se puede decir que Newton se vió obligado a inventar la derivación y la integración con el fin de desarrollar su mecánica.

Newton utilizó por primera vez su método de fluxiones en 1665-66 (llamó fluxión al ritmo de variación de una cantidad que en realidad no es otra cosa que su derivada con respecto al tiempo y la representó mediante una simbolismo de puntos, notación que aún se mantiene en la dinámica económica), pero dada su resistencia a todo tipo de publicaciones, el resumen de sus métodos no apareció hasta 1693. "En el método de fluxiones Newton establece el problema fundamental del cálculo: dada la relación de cantidades, encontrar la relación de sus fluxiones; e inversamente"[4].

En forma parecida, pero mucho más preocupado por una mayor claridad de conceptos, por un aspecto formal de la matemática y, sobre todo, por el sueño de una lengua universal y unitaria en los métodos científicos, Leibniz, aparte de descubrir con independencia de Newton la conexión existente entre el método de tangentes y el de cuadraturas, enriquecerá el análisis con una simbología que, sin lugar a dudas, contribuirá al desarrollo de estos métodos. Así, le vemos introducir los símbolos de integral $\int$ y diferencial d, como dos operadores inversos el uno del otro, resolviendo entonces los más variados problemas del cálculo. El hecho de que sus trabajos fueran publicados en 1684 y dada la resistencia que ofreció Newton a la publicación de sus métodos que, indudablemene conoció antes, dará lugar a toda una controversia sobre prioridad, estableciéndose dos bandos opuestos entre los admiradores de uno y de otro. De esta forma, y como nos dice Bell "Los efectos que esta controversia produjo sobre las matemáticas inglesas durante todo un siglo, fueron deplorables"[5].

De todas formas, resulta una simplificación excesiva y por lo tanto miope y poco representativa de los hechos la que atribuye en forma in-

4. Ver BOYER, C.B., *The History of the Calculus and its Conceptual Developments,* Dover Publications, New York 1959, pp. 194.

5. Ver BVELL, E.T., *The Development of Mathematics,* McGraw-Hill, New York 1940. Existe versión castellana, Ed. Fondo de Cultura Económica. Buenos Aires 1949., pp. 157.

dependiente la invención del cálculo infinitesimal a los dos grandes genios Newton y Leibniz, pues con ello se olvida a toda una serie de precursores que diseminados por Europa a lo largo de los siglos XVI y XVII, tales como J. Kepler (1571-1630), B. Cavalieri (1598-1662), Torricelli (1608-1647), G. Sanint Vicent (1584-1667), Fermat, Barrow y otros que plantearon toda una gama de problemas referidos a la determinación de máximos y mínimos, determinación de tangentes, curvaturas, rectificaciones, determinación de centros de gravedad, momentos de inercia etc. que aunque no resuelven en una forma sistemática sí, al menos, con una gran exactitud[6]. Y, lo que es más importante, empiezan a tener conciencia de la conexión existente entre la integración y la diferenciación. preparando entonces el camino para que Newton y Leibniz dieran una formulación sistemática a estos problemas. En la misma forma, aparecen una serie de seguidores tales como Taylor (1685-1731), Mc Laurin (1698-1746) Jacob Bernoulli (1654-1705), Joan Bernoulli (1667-1748) que completaron su obra.

En realidad el nacimiento del cálculo es el producto de una larga evolución que Newton y Leibniz no empezaron ni dieron fín, pero en la que desempeñaron, indudablemente, el papel más decisivo.

El resultado fue, como establece Bourbaki que "entre 1695 y 1700 no hay un solo volumen de las *Actas Eruditorum* publicado mensualmente en Leipzig en el que no aparecieran memorias de Leibniz, de los hermanos Bernouilli y del Marqués de L'Hôpital tratando, más o menos con las notaciones que empleamos hoy los problemas más variados de cálculo diferencial, del cálculo integral, del cálculo de variciones. Así pues, el cálculo infinitesimal, o, como han terminado por decir los ingleses el cálculo por excelencia (calculus), se ha forjado casi exactamente en el intervalo de un siglo y, casi tres siglos de desgaste permanente no han conseguido agotar por completo este instrumento incomparable"[7].

Dada una visión panorámica de las principales características de los comienzos del cálculo infinitesimal en el pensamieno científico[8], queda pues por contestar la segunda parte de nuestra cuestión; ¿cuándo y cómo penetraron estos métodos en el cuerpo de la teoría económica? Responder a esta cuestión no resulta ya tan fácil, por la sencilla razón de

6. Ver REY PASTOR y BABINI, *Historia de las Matemáticas,* Ed. Espasa Calpe, Buenos Aires 1951, pp. 229.

7. Ver BOURBAKI, N., *Elements d'Histoire des Mathematiques,* Hermann, Paris 1966. Existe versión castellana. Ed. Alianza, pp. 228.

8. Ver mi Tesis Doctoral *Orígenes y Desarrollo del Método Matemático en Economía: 1711-1780,* Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Barcelona, 1975. En cuyo Apéndice, pp. 338-447 se hace un resumen de toda la historia del pensamiento matemático, desde sus comienzos hasta nuestros días.

que no es posible consultar una historia de la economía matemática pues, como considera el Profesor Lancaster "La historia de la economía matemática está aún por escribir"[9].

Una opinión bastante generalizada entre los teóricos de la economía es asociar el nombre de A.A. Cournot con el nacimiento de los métodos infinitesimales en el análisis económico. Si bien es cierto que Cournot con la publicación de sus 'Recherches' en 1838, hizo uso, en una forma sistemática de los principios generales de las funciones contínuas y diferenciables de una sola variable y, colocando la fórmula de Taylor en el centro del análisis (no en vano fue un profesor de matemáticas superiores en la Universidad de Lyon que tuvo por maestros, entre otros, a Laplace y Lagrange), supo captar el proceso económico en términos de relaciones funcionales, logrando obtener, en el marco del equilibrio parcial, con todo rigor, un cuadro de bellos teoremas que constituyen, aún hoy, el núcleo central de la teoría estática de la formación del precio; analizando la función de demanda, función de ingreso, elasticidad de demanda respecto al precio, función de costes y, lo que hoy llamamos funciones de ingresos y costes marginales. Pero, no es menos cierto que, a pesar de que la mayor parte de sus trabajos no fueron publicados hasta 1850, existen indicios más que suficientes que permiten probar que el alemán J.H. Von Thunen había elaborado con anterioridad a 1830[10] su famosa teoría del salario natural y su relación con la tasa de interés y la renta de la tierra, haciendo uso de los principios de máximos y mínimos y, no sólo en funciones de una variable sino, manejando perfectamente las más diversas técnicas del cálculo diferencial con funciones de varias variables, sabiendo apreciar la importancia de todas estas técnicas en la investigación de los fenómenos económicos. Afirma que "el método de determinar el máximo producto neto, está de acuerdo con el método que en matemáticas se estima correcto para determinar el máximo valor de una función que contiene varias variables"[11]. Pone además de manifiesto el principio de equidad marginal como necesario para maximizar una magnitud y, apoyándose en él, define conceptos complejos como el de productividad marginal, en el que apoya su teoría de la distribución o, el principio de substitución que, sin lugar a dudas, han jugado un papel de valor incalculable para el desarrollo del pensamiento económico. En resumen, las técnicas infinitesimales le permiten descubrir los más diversos teoremas de la teoría

9. Ver LANCASTER, K., *Mathematical Economics,* Existe versión castellana bajo el título *Economía Matemática,* Ed. Bosch, pp. 18.

10. Ver SCHNEIDER, E., "Johan Heinrich Von Thunen", *Econométrica,* Enero 1934, Vol. II, núm. I., pp. 1-12, donde se hallan amplios datos de la vida de Von Thunen.

11. Ver Von THUNEN, J.H., *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft un Nationalokonomie,* Gustav Fisher Verlag, Stuttgart 1966, pp. 411-412.

dependiente la invención del cálculo infinitesimal a los dos grandes genios Newton y Leibniz, pues con ello se olvida a toda una serie de precursores que diseminados por Europa a lo largo de los siglos XVI y XVII, tales como J. Kepler (1571-1630), B. Cavalieri (1598-1662), Torricelli (1608-1647), G. Sanint Vicent (1584-1667), Fermat, Barrow y otros que plantearon toda una gama de problemas referidos a la determinación de máximos y mínimos, determinación de tangentes, curvaturas, rectificaciones, determinación de centros de gravedad, momentos de inercia etc. que aunque no resuelven en una forma sistemática sí, al menos, con una gran exactitud[6]. Y, lo que es más importante, empiezan a tener conciencia de la conexión existente entre la integración y la diferenciación. preparando entonces el camino para que Newton y Leibniz dieran una formulación sistemática a estos problemas. En la misma forma, aparecen una serie de seguidores tales como Taylor (1685-1731), Mc Laurin (1698-1746) Jacob Bernoulli (1654-1705), Joan Bernoulli (1667-1748) que completaron su obra.

En realidad el nacimiento del cálculo es el producto de una larga evolución que Newton y Leibniz no empezaron ni dieron fín, pero en la que desempeñaron, indudablemente, el papel más decisivo.

El resultado fue, como establece Bourbaki que "entre 1695 y 1700 no hay un solo volumen de las *Actas Eruditorum* publicado mensualmente en Leipzig en el que no aparecieran memorias de Leibniz, de los hermanos Bernouilli y del Marqués de L'Hôpital tratando, más o menos con las notaciones que empleamos hoy los problemas más variados de cálculo diferencial, del cálculo integral, del cálculo de variciones. Así pues, el cálculo infinitesimal, o, como han terminado por decir los ingleses el cálculo por excelencia (calculus), se ha forjado casi exactamente en el intervalo de un siglo y, casi tres siglos de desgaste permanente no han conseguido agotar por completo este instrumento incomparable"[7].

Dada una visión panorámica de las principales características de los comienzos del cálculo infinitesimal en el pensamieno científico[8], queda pues por contestar la segunda parte de nuestra cuestión; ¿cuándo y cómo penetraron estos métodos en el cuerpo de la teoría económica? Responder a esta cuestión no resulta ya tan fácil, por la sencilla razón de

6. Ver REY PASTOR y BABINI, *Historia de las Matemáticas,* Ed. Espasa Calpe, Buenos Aires 1951, pp. 229.

7. Ver BOURBAKI, N., *Elements d'Histoire des Mathematiques,* Hermann, Paris 1966. Existe versión castellana. Ed. Alianza, pp. 228.

8. Ver mi Tesis Doctoral *Orígenes y Desarrollo del Método Matemático en Economía: 1711-1780,* Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Barcelona, 1975. En cuyo Apéndice, pp. 338-447 se hace un resumen de toda la historia del pensamiento matemático, desde sus comienzos hasta nuestros días.

que no es posible consultar una historia de la economía matemática pues, como considera el Profesor Lancaster "La historia de la economía matemática está aún por escribir"[9].

Una opinión bastante generalizada entre los teóricos de la economía es asociar el nombre de A.A. Cournot con el nacimiento de los métodos infinitesimales en el análisis económico. Si bien es cierto que Cournot con la publicación de sus 'Recherches' en 1838, hizo uso, en una forma sistemática de los principios generales de las funciones contínuas y diferenciables de una sola variable y, colocando la fórmula de Taylor en el centro del análisis (no en vano fue un profesor de matemáticas superiores en la Universidad de Lyon que tuvo por maestros, entre otros, a Laplace y Lagrange), supo captar el proceso económico en términos de relaciones funcionales, logrando obtener, en el marco del equilibrio parcial, con todo rigor, un cuadro de bellos teoremas que constituyen, aún hoy, el núcleo central de la teoría estática de la formación del precio; analizando la función de demanda, función de ingreso, elasticidad de demanda respecto al precio, función de costes y, lo que hoy llamamos funciones de ingresos y costes marginales. Pero, no es menos cierto que, a pesar de que la mayor parte de sus trabajos no fueron publicados hasta 1850, existen indicios más que suficientes que permiten probar que el alemán J.H. Von Thunen había elaborado con anterioridad a 1830[10] su famosa teoría del salario natural y su relación con la tasa de interés y la renta de la tierra, haciendo uso de los principios de máximos y mínimos y, no sólo en funciones de una variable sino, manejando perfectamente las más diversas técnicas del cálculo diferencial con funciones de varias variables, sabiendo apreciar la importancia de todas estas técnicas en la investigación de los fenómenos económicos. Afirma que "el método de determinar el máximo producto neto, está de acuerdo con el método que en matemáticas se estima correcto para determinar el máximo valor de una función que contiene varias variables"[11]. Pone además de manifiesto el principio de equidad marginal como necesario para maximizar una magnitud y, apoyándose en él, define conceptos complejos como el de productividad marginal, en el que apoya su teoría de la distribución o, el principio de substitución que, sin lugar a dudas, han jugado un papel de valor incalculable para el desarrollo del pensamiento económico. En resumen, las técnicas infinitesimales le permiten descubrir los más diversos teoremas de la teoría

9. Ver LANCASTER, K., *Mathematical Economics,* Existe versión castellana bajo el título *Economía Matemática,* Ed. Bosch, pp. 18.

10. Ver SCHNEIDER, E., "Johan Heinrich Von Thunen", *Econométrica,* Enero 1934, Vol. II, núm. I., pp. 1-12, donde se hallan amplios datos de la vida de Von Thunen.

11. Ver Von THUNEN, J.H., *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft un Nationalokonomie,* Gustav Fisher Verlag, Stuttgart 1966, pp. 411-412.

microeconómica de la producción y el empleo. Son indiscutiblemente estos aspectos los que conducen al Profesor Schneider a reclamar para Von Thunen el privilegio de ser el primer investigador serio que utiliza de una manera sistemática las técnicas del análisis marginalista, afirmando que "no pertenece a Cournot la prioridad objetiva en la introducción del análisis marginal. El primer economista que lo introduce en la ciencia económica es Johan Heinrich Von Thunen"[12], aunque, evidentemente, reconoce a Cournot como descubridor independiente del análisis marginal y de su importancia en la ciencia económica.

Paradójicamene, el lector puede observar que nos encontramos con una situación perfectamente análoga a la que ya hemos comentado en torno a la prioridad del descubrimiento de los métodos infinitesimales entre Newton y Leibniz, sólo que ahora se refiere a la prioridad de su introducción en el cuerpo de la teoría económica, dando lugar al análisis marginal. Cabe también señalar que si consideramos a Von Thunen y a Cournot como los primeros que introducen estos métodos en el análisis económico (y, al menos, en una forma sistemática, esto es cierto), existe un desfase temporal de casi siglo y medio entre la aplicación de estos métodos al análisis de los fenómenos físicos y su aplicación al análisis económico y, este aspecto no deja de ser significativo en el desarrollo experimentado por estas disciplinas teóricas. Por un lado como estos métodos nacen ligados a la solución de problemas de mecánica, serán interpretados posteriormente por muchos autores (desconociendo la verdadera naturaleza de la matemática) como de uso exclusivo de la física, planteándose así las más diversas polémicas en torno a su entrada en el cuerpo económico[13].

Cabe señalar que el situar a Von Thunen y a Cournot como los descubridores del análisis marginalista es también una simplificación excesiva e injusta. Pues aunque ellos, evidentemente, representan el papel más importante en la elaboración de este método, este, en realidad, se debió a un proceso que fué preparando el marco adecuado, tomando conciencia de la importancia que las técnicas de cálculo y geometría analítica ofrecían al análisis de los fenómenos económicos. Antes pues de Von Thunen y Cournot es posible encontrar una serie de trabajos donde se hace uso de estas técnicas en la solución de determinados problemas concretos de naturaleza económica. Y, estos trabajos junto con los de Von Thunen y Cournot representan un movimiento prematuro y

12. Ver SCHENIDER, E., *Einfuhrung in die Wirtschaftstheorie*, IV Teil: Ausgewalte Kapitel der Geschchte der Wirtschafstheorie (Tubingen 1962). Existe versión castellana en Ed. Aguilar, Madrid 1970, pp. 123. Nota 55.

13. Ver mi Tesis Doctoral *Orígenes y...*, op. cit., donde se hace un estudio de estas polémicas, pp. 45-80.

avanzado en la utilización de unas técnicas que sólo a partir de 1870 entrarán con pie firme en el cuerpo de la teoría económica convirtiéndose en el núcleo central de la economía matemática. Hacer un resumen de la forma en que fueron utilizados estos métodos antes de Cournot, constituye un aspecto central de este trabajo.

Cabe señalar que estos autores que se sitúan a lo largo del siglo XVIII y comienzos del XIX, no están integrados en ninguna de las corrientes ortodoxas del pensamiento económico de la época y, el método que ellos utilizaron en la solución de determinados problemas resultó entonces tan nuevo que no es extraño que sus trabajos pasaran totalmente desapercibidos. Y, esto que es cierto para ellos lo es también para Von Thunen y Cournot, cutos trabajos sólo empezarán a ser conocidos y valorados a partir de 1870. Por otra parte, el aislamiento en que, generalmente, elaboran sus ideas hace aleatoria cualquier afirmación que intente destacar ciertas influencias de ideas análogas expresadas en forma más o menos parecida, pero con completa independencia. Tampoco en ninguno de ellos es posible encontrar el grado de sistematización de Cournot y Von Thunen pues, en su mayor parte hacen uso de técnicas no sólo rudimentarias sino erróneas, lo que por otro lado resulta natural, ya que los métodos infinitesimales sólo están en poder de un reducido número de científicos absorbidos por los problemas de la física, siendo muy pocos, incluso entre los mismos profesionales de la matemática, los que se encontraban en condiciones de aplicarlos. Más que sus aportaciones es la clara visión que tienen de la importancia que ofrecen los métodos infinitesimales para la elaboración de principios generales y solución de diversos problemas de naturaleza económica, lo que nos hace considerarlos como los precursores de análisis marginalista.

El primer autor al que corresponde el privilegio de hacer uso de métodos infinitesimales en un problema concreto de análisis económico es el matemático Daniel Bernouilli (1700-1782). Aunque Bernouilli está mucho más interesado por los problemas de la física y de la matemática pura, el hecho de haber enfocado problemas de juegos de azar, mediante el análisis de la utilidad y valor, le conduce, como dice el Profesor Robertson "a hacer uso por primera vez del cálculo en un problema que si no era económico en su época, al menos posteriormente resultó serlo"[14].

El trabajo de Bernouilli por el que se interesa la economía matemática, fue publicado por la Academia Imperial de Ciencias de Sn. Petersburgo en 1738, con el título de 'Specimen de Theorie Novae de

14. Ver ROBERTSON, R.M., "Mathematical Economics Before Cournot", *Journal of Political Economy*, Vol. LVII, pp. 525.

Mensuria Sortis'[15].

La importante relación entre la utilidad y la renta que aparece en este trabajo, fue motivada por el cálculo de valor esperado o esperanza matemática en los juegos de azar. El punto inicial de sus ideas lo constituye el problema conocido con el nombre de Paradoja del Juego de Sn. Petersburgo. El enunciado de este problema que el mismo Bernoulli da[16], es el siguiente: Pedro, lanza una moneda al aire sucesivamente, hasta conseguir cara, y conviene en dar a Pablo un ducado si obtiene cara en la primera tirada, dos si esto ocurre en la segunda, cuatro si ocurre en la tercera, ocho si es en la cuarta y así sucesivamente, de manera que en cada lanzamiento, el número de ducados sea doble que en el anterior, en el que no se había obtenido cara. Se plantea entonces la siguiente cuestión. ¿Cuánto estaría dispuesto Pablo a pagar por el privilegio de participar en el juego, si éste ha de ser un juego equitativo? Como ya es sabido, en este tipo de juegos el valor esperado ha de ser cero, lo que implica que la cantidad que se ha de pagar ha de coincidir con la esperanza matemática de la ganancia. Para calcular ésta, es necesario determinar el espacio de probabilidad que corresponde a ese juego. Ahora bien, el espacio muestral en este caso es infinito numerable y se puede expresar por $\Omega = \left\{ 1, 2, 3, \dots \infty \right\}$. Por lo tanto, el espacio de probabilidad se obtiene de la siguiente forma: la probabilidad de obtener cara en la primera tirada $P(1) = 1/2$. La probabilidad de obtenerla en la segunda $P(2)$ igual a $(1 - 1/2)1/2 = 1/4$. La probabilidad de obtenerla en la tercera $P(3)$ igual a $1/8$. Por lo tanto, la probabilidad de obtenerla en la tirada enésima $P(n)$ igual a $1/2^n \dots\dots p(\infty) = 0$. Si consideramos que la sucesión de ganancias posibles viene dada por la siguiente progresión $1, 2, 2^2, 2^3, \dots 2^{n-1}$, entonces el valor de la esperanza matemática E será

$$E = 1 + \frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{2^2} + 2^2\,\frac{1}{2^3} + \dots + 2^{n-1}\,\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Es evidente que esta expectativa tiene un valor infinito, lo que significa que Pablo debe pagar a Pedro una suma infinita por el hecho de participar en el juego. ¿Cómo resuelve Bernouilli este problema? Su solución consiste, como se verá, en establecer una hipótesis que substituye el concepto de expectativa matemática, por otro concepto de expecta-

15. Este artículo ha sido traducido del latín al inglés por el Dr. Louise Sommer de American University, Washington D.C., bajo el título "Exposition of a new Theory on the Measurement of Risk", aparecido en *Econométrica,* Vol. 22, 1954, pp. 23-36.
16. Ver BERNOUILLI, D., *Exposition of...,* Op. cit., pp. 31.

tiva moral, el cual pondera las probabilidades, no ya con las ganancias posibles, sino con las utilidades que se derivan de ellas. Y, como según Bernouilli, estas utilidades son decrecientes, encuentra una solución finita al problema.

Al comienzo de su trabajo, expone Bernouilli la regla de cálculo que permite determinar el valor esperado en los juegos de azar; regla que como es sabido pondera las probabilidades con las ganancias posibles. Considera entonces que en este método de cálculo no se tienen en cuenta las circunstancias propias de cada indivíduo; esto es, que el valor de la expectativa se toma en términos objetivos y con independencia de las circunstancias de los sujetos que intervienen. Con el fin de hacer claro este aspecto, pone el siguiente ejemplo.

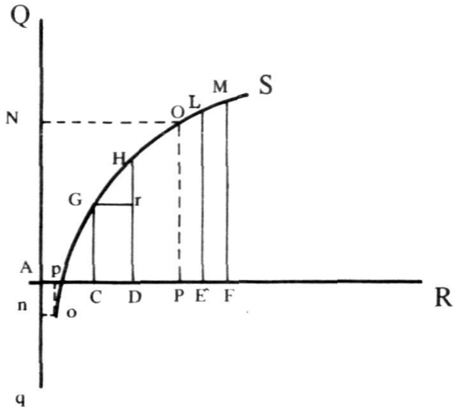
Un hombre pobre que obtenga un billete de lotería, con igual probabilidad de ganar 20.000 ducados que de no ganar nada, tendrá como esperanza matemática, según la regla general $1/2$ $20.000 = 10.000$ ducados; planteándose entonces si este indivíduo actuaría absurdamente por el hecho de vender su billete por 9.000 ducados, considerando que su respuesta es negativa. En cambio, admite que para un hombre rico, posiblemente sería absurdo rehusar a comprar el billete por dicha cantidad. Resulta entonces claro que no todas las personas pueden usar la misma regla para evaluar un juego, lo que implica que la regla general ha de descartarse ya que mil ducados son más significativos para un hombre pobre que para uno rico, aunque ambos ganen la misma cantidad[17].

Con este ejemplo, Bernouilli trata de indicar que la satisfacción que se obtiene por incrementos de la riqueza, se ha de tener en cuenta no sólo estos incrementos, sino también la riqueza inicial que posee el individuo. Y es más, lo que va a proponer, es que si la utilidad marginal de la renta es decreciente, el valor esperado en los juegos justos, según la regla general, es negativa, puesto que la pérdida de una cierta cantidad produce al sujeto una desutilidad mayor que la utilidad que puede ofrecerle la ganancia de esa cantidad. Por esto Bernouilli cree que cualquier método que se proponga calcular el valor esperado ha de tener en cuenta la utilidad que se deriva de la ganancia. Y, en este sentido propone la siguiente regla: "Si la utilidad de cada expectativa de ganancia posible se multiplica por el número de formas en que ésta se puede presentar y la suma de estos productos se divide por el número total de casos posibles, se obtiene una utilidad media (expectativa moral), de modo que la ganancia que corresponde a esta utilidad media es el valor del riesgo"[18].

17. Ver BERNOULLI, D., *Exposition of...*, Op. cit., pp. 24.
18. Ver BERNOULLI, D., *Exposition of...*, Op. cit., pp. 25.

Llegados a este punto es fácil observar cómo Bernouilli no se satisface sólo con el establecimiento del decrecimiento de la utilidad marginal de la riqueza, sino que supone, sin ningún argumento que lo justifique, una forma concreta de función de utilidad al establecer una relación inversamente proporcional entre la variación de la utilidad y la riqueza.

Una vez establecidas estas ideas Bernouilli dará una interpretación matemática de ellas haciendo uso de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal. De esta forma nos muestra un gráfico[19] y razona en los siguientes términos



Si con AB se representa la riqueza inicial poseída por un indivíduo y se traza por AB una curva BGLS, de manera que las ordenadas CG, DH, EL..., representen las utilidades, entonces las abcisas BC, BD, BE,..., designan los incrementos en la riqueza que corresponden a esas utilidades. Es fácil apreciar que la curva con la uqe Bernouilli trata de mostrar la relación entre la variación de la riqueza y la utilidad es cóncava hacia abajo, lo que obciamente implica que un aumento de riqueza, por ejemplo CD, produce un aumento en la utilidad Hr menos que proporcional. Ahora bien, con el fin de calcular la utilidad media o esperanza moral que corrsponde a una serie de incrementos en la riqueza, Bernouilli representa por m, n, p, q,..., las formas favorables en que los aumentos de ganancias BC, BD, BE,..., pueden presentarse. Y, entonces, haciendo uso de su principio, obtiene como valor de la expectativa moral o utilidad

19. Ver BERNOUILLI, D.: *Exposition of...*, op. cit., p. 26.

media la siguiente expresión

$$PO = \frac{mCG + nDH + pEL + qFM + \ldots}{m + n + p + q + \ldots}$$ [20]

Observando la figura, puede verse que PO es la utilidad que correspondería a un aumento de ganancia BP. ¿Cuál sería entonces la máxima cantidad que debe arriesgarse según esta expectativa? Bernouilli, primeramente, calcula este valor en términos geométricos; para ello prolonga la curva en dirección opuesta, de manera que las abcisas representen pérdidas y las ordenadas las desutilidades que se derivan de ellas. Entonces traza AQ perpendicular a AR, de manera que AN = PO. De este modo NO = AB no es otra cosa que la ganancia esperada. Si el juego ha de ser equitativo o justo, la utilidad de la ganancia debe igualar a la desutilidad de los pagos. Por lo tanto construye po = PO. De esta forma la abcisa pB representa la máxima cantidad a pagar[21]; es decir, una cantidad menor que la ganancia esperada, pues según la hipótesis de Bernouilli resultaría absurdo pagar una cantidad precisamente igual a la ganancia, ya que la utilidad que se deriva de ello no coincide con la desutilidad de la pérdida.

Pero Bernouilli no se satisface simplemente con una interpretación geométrica de su hipótesis, sino que haciendo uso de métodos infinitesimales, encontrará la ecuación de la curva sobre la que anteriormente ha razonado. En efecto, supone que las ganancias BC y BD, son prácticamente iguales, lo que implica que su diferencia CD es infinitamente pequeña. De esta forma traza la recta Gr paralela a BR y entonces rH representará el incremento infinitamente pequeño de utilidad que corresponde a una persona que posea una riqueza inicial AC y la incremente en una cantidad infinitamente pequeña CD. Bernouilli aplica entonces la tesis de que la utilidad que se deriva de este incremento está en razón directa al mismo y en razón inversa a la riqueza AC inicialmente poseída, deduciendo a partir de aquí la ecuación de la curva. Para ello establece las siguientes relaciones: AC = x; CD = dz; CG = y; rH = dy; AB = q. Y, designando por b a una constante de proporcionalidad, plantea la siguiente ecuación diferencial

$$dy = \frac{bdx}{x}$$

Siendo éste el primer uso que se hace de las ecuaciones diferenciales en

20. Ver BERNOUILLI, D.: *Exposition of...*, op. cit., p. 26.
21. Ver BERNOUILLI, D.: *Exposition of...*, op. cit., pp. 26-27.

el análisis económico. Y, de una manera correcta, Bernouilli da como solución de su ecuación la expresión

$$y = b \log \frac{x}{\alpha}$$

Cabe ahora señalar que el mismo Bernouilli al final de su trabajo indica que llegó a su conocimiento que el matemático suizo Cramer, había llegado ya en 1728 a una teoría muy semejante a la suya, pero tomando como hipótesis fundamental que la utilidad marginal de la riqueza es inversamente proporcional a su raiz cuadrada. De esta forma, la ecuación diferencial de Bernouilli tomaría la siguiente expresión.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{x}$$

Con esto se pone de manifiesto que, en realidad, la hipótesis de Bernouilli es completamente arbitraria, siendo éste el aspecto que conduce al profesor Stigler a expresarse en los siguientes términos: "Bernouilli estaba acertado al buscar la explicación en la utilidad (o alternativamente, como hizo Cournot, en las evaluaciones del mercado), habiéndose equivocado solamente al establecer un supuesto especial respecto a la forma de la curva de utilidad, para la que no había fundamento y a la que no sometió a comprobaciones"[22].

Por otro lado, resulta claro que aunque el trabajo de Bernouilli fue recogido y perfeccionado por Laplace posteriormente, lo cierto es que, como considera el Profesor Schumpeter, "la obra de Bernoulli fue prácticamente desconocida por los economistas hasta que la notaron algunos que habían llegado ya por sí mismos a las mismas ideas o ideas análogas"[23]. Sin embargo, no cabe duda de que llamó la atención de ciertos economistas del siglo XIX. Jevons la conoció y aceptó sus implicaciones pero, muchos de ellos, como considera el Profesor Stigler "se limitaban a referirse a la hipótesis, favorablemente o no, sin hacer uso real de la teoría. En este grupo podemos incluir a Edgeworth, Pareto y Wicksell, así como otros de menor importancia". Pero, en cambio –prosigue Stigler–, "Marshall tomó en consideración la hipótesis de Bernouilli mucho más seriamente que ningún otro economista de primera fila. En 1890 se mostró dispuesto a aplicarla directamente a todas las

22. Ver STIGLER, G.J.: *The Development of Utility Theory.* Reproducido en *The Journal of Political Economy,* Vol. LVIII (agosto-octubre 1950). Este artículo se encuentra recopilado en *Essays in Economic Thought: Aristotle to Marshall.* Existe versión castellana, Ed. Tecnos, Madrid 1971, pp. 643-644.
23. Ver SCHUMPETER, J.A.: *History of...,* op. cit., p. 353, nota 39.

clases de rentas"[24].

Por otro lado, también cabe matizar que, en realidad, la importancia del trabajo de Bernouilli no radica en el establecimiento del principio de utilidad marginal decreciente, aspecto éste que, como cualquier economista sabe, arranca, nada menos que en Aristóteles, cuyo pensamiento influyó en los escolásticos de la Edad Media, adquiriendo posteriormente singular importancia con el grupo de escritores italianos encabezados por Davanzantti, Montenari y Galiani, así como los franceses Turgot y Condillac. Ahora bien, ninguno de ellos estableció un método marginalista y, en este sentido puede decirse que el primer paso fue dado por Bernouilli que elaboró nuevos puntos de vista en la evolución de la estructura sobre la teoría subjetiva del valor en el siglo XVIII. Pero esta teoría tendrá que esperar más de un siglo, concretamente hasta 1870, para que el análisis marginalista, en estrecha colaboración con los métodos infinitesimales, penetre con pie firme en el cuerpo de teoría económica.

Dentro de la corriente utilitarista que relaciona el mecanismo de los precios con la satisfacción de las necesidades, ligándolo a un cálculo de placer y dolor, cabe mencionar a la gran figura de la Escuela Milanesa del siglo XVIII Cesare Bonesana, marqués de Beccaria que, no sólo señaló la importancia que tiene el método matemático para el análisis de los mecanismos económicos, sino que hace uso directo de él, precisamente, con el fin de mostrar cómo la teoría económica puede desarrollarse en términos matemáticos. Ahora bien, cabe señalar que Beccaria no hace uso de los métodos infinitesimales y ni siquiera en forma explícita de la geometría analítica, pero sí que es posible apreciar fácilmente en su trabajo que conoce sobradamente lo que significa la interpretación de una ecuación en términos de lugar geométrico; esto es, conoce el método geométrico-analítico y sabe apreciar la posibilidad que encierra para el análisis económico. Por tanto, nos encontramos aquí con un nuevo intento, después del de Bernouilli, de hacer uso de la geometría analítica en la teoría económica.

El interés que la economía matemática muestra por Beccaria se reduce a un breve, pero ingenioso, trabajo publicado en 1764 con el título de "Tentativo Analítico sur Contrabbandi"[25], donde Beccaria hace un caluroso elogio de la utilidad que ofrece el álgebra para el tratamiento de los problemas del análisis económico, aunque admite que debe usarse siempre dentro de ciertos límites, puesto que los fenómenos eco-

24. STIGLER, G.J: *The Development...*, op. cit., pp. 644-645.

25. Ver BECCARIA, C.B.: "Tentativo Analitico sur Contrabbandi", recogido en la Colección Custodi *Scritori Classici Italiani di Economia Política,* Parte Moderna, Tomo XII, pp. 235-241.

nómicos presentan una gama de factores que no pueden se determinados con precisión.

Como vemos se nos ofrece aquí, en pleno siglo XVIII una clara versión de que el método matemático puede ser enormemente útil en ciertos sectores de las ciencias sociales pero, en cambio, puede dejar de serlo en otros.

Supone Beccaria que cuando el dominio establece un derecho sobre las mecancías que entran o salen de una país, generalmente decreta, al mismo tiempo, que aquellos comerciantes que intenten evitar el pago de estos derechos sean castigados con la pérdida de estas mercancías. Por lo tanto cualquier comerciante que de una manera ilegal intente pasarlas, se encuentra por un lado, con el riesgo de perderlas y, por otro, con el estímulo de obtener un beneficio precisamente igual al valor de estos derechos[26].

Lo que Beccaria trata de investigar es aquella parte de mercancía que puede dejar perder un comerciante de manera que, a pesar de ello se encuentre en la misma situación que si hubiese pasado legalmente los bienes pagando la tasa. El problema, pues, que propone Beccaria se puede enunciar en los siguientes términos: suponiendo que una parte de la mercancía sea capturada por el gobierno, ¿a qué valor deberá ascender el resto para que el contrabandista compense con él, al no pagar la tasa, aquella pérdida quedándose, pues, en una situación de indiferencia.

Es ésta la idea que induce al Profesor Schumpeter a considerar que este hecho "indica el descubrimiento de la idea subyacente al moderno análisis de las curvas de indiferencia"[27]. Esto es una prueba de la alta estimación, un poco exagerada, que Schumpeter profesa a Beccaria.

Este problema no sólo lo resuelve Beccaria en términos precisos, sino que su razonamiento matemático no está exento de cierta elegancia. Las variables que considera a tener en cuenta en el problema son las siguientes:

- u representa el valor total de los bienes.
- x representa el valor de los bienes que se deciden pasar de contrabando, con la finalidad de que el comerciante quede sin pérdida ni ganancia (evidentemente $u - x$ será el valor de los bienes confiscados).
- t valor total de la tasa impuesta por el gobierno.
- d diferencia entre el valor de la tasa y el valor de la mercancía.

26. Ver BECCARIA, C.B.: Custodi *Scritori Classici...*, op. cit., p. 238.
27. Ver SCHUMPETER, J.A.: *History of...*, op. cit., p. 221.

Resulta claro que el valor de los derechos que corresponden a la cantidad de mercancía x, y que el contrabandista no paga, viene dado por la expresión

$$\frac{x}{u}\, t$$

De esta forma, Beccaria considera que "la razón entre el valor total y la tasa total deberán igualar a la razón entre la parte de mercancía que se requiere pasar y el valor de los derechos que le corresponden". Estableciendo, por tanto, la siguiente proporción

$$u : t = x : t\,\frac{x}{u}$$ [28]

A partir de aquí, y teniendo en cuenta la condición básica del problema, es decir, que la ganancia ha de igualar a la pérdida para quedarse en situación de indiferencia, Beccaria plantea la ecuación en la siguiente forma

$$x + \frac{tx}{u} = u$$

y de aquí deduce la ecuación fundamental del problema que la expresa en los siguientes términos

$$ux + tx = u\,.\,u$$ [29]

de donde despeja directamente x, obteniendo como solución

$$x = \frac{u\,.\,u}{u + t}$$

Una vez llegado aquí nos muestra un análisis de los diversos valores que puede tomar x en función de los distintos valores de t. En efecto, la tasa puede igualar el valor de los bienes, esto es $t = u$, o puede ser mayor que este valor en una cantidad d; esto es $t = u + d$ o, puede ser menor que el valor de u en la misma cuantía d; esto es $t = u - d$. Inmediatamente considera que si se sustituyen estos valores de

28. Ver BECCARIA, C.G.: Custodi *Scrittori Classici...*, op. cit., Vol. XII, p. 239.

29. Esta es la manera en que Beccaria escribe la ecuación, no usando, por tanto, el término u^2. Ver Custodi, *Scrittori Classici...*, op. cit., Vol. XII, p. 239.

t en la ecuación se obtienen las siguientes relaciones que reproducimos literalmente.

Cuando $t = u$, entonces

$$x = \frac{u \,.\, u}{u + u} = \frac{u \,.\, u}{2u} = \frac{u}{2}$$

Cuando $t = u + d$, entonces

$$x = \frac{u \,.\, u}{u + u + d} = \frac{u \,.\, u}{2u + d} < \frac{u}{2}$$

Cuando $t = u - d$, entonces

$$x = \frac{u \,.\, u}{u + u - d} = \frac{u \,.\, u}{2u - d} > \frac{u}{2}$$

Estas relaciones indican que cuanto mayor es el valor de la tasa t, menor será el valor de la cantidad x que se requiere pasar para que el contrabandista quede en situación de indiferencia. Pero Beccaria no se conforma sólo con esas expresiones sino que va a indicar la forma en que es posible investigar todos los distintos valores de x en función de los valores de t, haciendo para ellos uso de los conceptos de la geometría analítica. En efecto, considera que si en la ecuación

$$u \,.\, x + t \,.\, x = u \,.\, u$$

se supone a t y a x como variables y a u como una constante, entonces el "lugar geométrico" de esa ecuación sería una hipérbola asintótica. Y, aunque Beccaria no dibuja la curva, indica con todo detalle la posición que debe tener aquélla con respecto a sus asíntotas, afirmando que "la inspección de la figura (para aquéllos que deseen dibujarla) les indicará todas las diferentes posibilidades permitidas por la ecuación"[30].

Se puede decir que, en la Historia del método matemático en Teoría económica, resulta obligado tratar junto a Beccaria al economista italiano Gluglielmo SILIO. Y esto, solamente, porque unos treinta años más tarde —tiempo que evidencia el lento progreso de la economía matemática en este período—, siguió el consejo de Beccaria y dibujó la curva, aunque no en los términos correctos, que aquél había solamente descrito[31].

30. Ver BECCARIA, C.B.: Custodi, *Scrittori Classici...*, op. cit., Vol. XII, p. 240.

31. Ver mi Tesis Doctoral *Orígenes y...*, op. cit. Donde se realiza un estudio de este autor, p. 214.

Ahora bien, en el mismo siglo XVIII, es posible encontrar dos autores que de una forma explícita utilizan rudimentos del cálculo infinitesimal en la teoría económica: Paulo Frisi y J.H.T. du Villard de Duran.

En efecto, con el italiano Paulo Frisi encontramos un intento primitivo de mostrar la ventaja que ofrece la teoría de máximos y mínimos para sistematizar, en términos rigurosos, determinados aspectos del pensamiento económico que aparecen en la genial obra de Pietro Verri[32].

El punto de arranque para la formulación matemática utilizada por Frisi se encuentra contenido en la proposición sostenida por Verri que establece que "el precio de un bien está en razón directa al número de compradores y en razón inversa al número de vendedores"[33].

Esta idea la recoge Frisi y trata de buscar entonces una relación matemática que le permita expresar el precio como una función del número de compradores y de vendedores. Para esto considera que si P es el precio, C el número de compradores y V el número de vendedores, entonces supone en principio que la relación matemática más adecuada vendría dada por la siguiente expresión

$$P = \frac{M(C + A)^m}{(V + B)^n}$$

donde A, B, N, m y n, son constantes.

Inmediatamente analiza el comportamiento de esta relación y observa que si C es igual a cero, entonces para que P sea cero, A debe ser nulo. Y en la misma forma, si suponemos que el número de compradores es fijo, entonces cuando V es cero, para que P sea infinito, B tiene que ser cero.

Este razonamiento le conduce a rechazar esa relación y tomar como función del precio la expresión

$$P = \frac{C^m}{V^n}$$

Razona sobre el comportamiento de esta relación con el fin de buscar los valores que pueden atribuirse a los componentes m y n. En este sentido cree que si el número de vendedores V está dado, para que el número de compradores C sea infinito, el precio debe de ser un infinito del mismo orden, llegando entonces a la conclusión de que para un valor de m distinto de uno, esta relación no tendría sentido. De la

32. Ver VERRI, P.: "Meditazioni Sulla Economia Plitica". Recopilada en la Colección Custodi *Scrittori Classici...*, op. cit., Parte Moderna, Vol. XV. En el Volumen XVII de esta colección contiene el estracto que hizo Frisi al pensamiento de Verri.

33. Ver VERRI, P.: Custodi, *Scrittori Classici...*, op. cit., Vol. XV, pp. 47-48.

misma forma piensa acerca de n, por lo que cree que la relación más adecuada para expresar el precio como función de compradores y vendedores vendría dada por $P = C/V$. Sobre esta función plantea Frisi un problema de máximos y mínimos. En efecto, considera que si dP, dC y dV representan las variaciones en el precio, número de compradores y número de vendedores respectivamente, entonces el precio será un máximo o un mínimo cuando sea cierta la siguiente relación:

$$dP = \frac{VdC - CdV}{V^2} = 0$$ [34]

de la que se obtiene

$$\frac{dC}{dV} = \frac{C}{V}$$

Esto indica que las variaciones simultáneas de C y de V se han de mantener siempre en la relación C/V para que exista un máximo y un mínimo.

Aquí el lector podrá apreciar más la buena voluntad de Frisi que la corrección de su procedimiento matemático; ya que en primer lugar, está considerando a P como una relación entre dos variables independientes, lo que implica que debería utilizar la diferencial total de esa función, cosa que no hace Frisi. Sin embargo, cabe señalar que este aspecto de funciones dadas en varias variables no es posible encontrarlo ni siquiera en Cournot, sino que será necesario esperar a finales del siglo XIX para que los métodos infinitesimales adquieran su mayor impulso en su aplicación a la teoría económica.

En segundo lugar, Frisi se limita a dar una condición necesaria de máximos y mínimos, no haciendo alusión alguna a condiciones suficientes. Y, en tercer lugar, y este es el aspecto más importante, no impone ninguna restricción a las variables C y V, lo que implica que si el precio no puede ser negativo, el valor mínimo de la función ha de ser cero, no teniendo sentido plantear ningún tipo de problemas de máximos y mínimos.

Aunque no es posible despreciar la aportación matemática de Frisi, ya que representa el primer intento de utilizar la teoría matemática de máximos y mínimos en el análisis económico, aspecto éste que cobrará posteriormente una singular importancia, sí que es posible, quizás, decir que más importante que su aportación matemática fueron las críticas

34. Ver FRISI, P.: Custodi, *Scrittori Classici...*, op. cit., Vol. XVII, p. 377.

que ya en su misma época suscitaron sus métodos, suscitándose una serie de polémicas y controversias en los mismos comienzos de la economía matemática. Así el matemático y filósofo G.B. Venturi criticó las expresiones matemáticas que utiliza Frisi para expresar las ideas de Verri[35].

Más interesantes y detalladas son las opiniones mantenidas por el matemático de la época Pietro Ferroni que en un trabajo[36], criticó los argumentos de Verri y del método matemático utilizado en la economía, negándose a admitir que la teoría de máximos y mínimos, en su sentido matemático, tuviera sentido en el análisis de la formación del precio. Puesto que en el caso de la expresión del precio como una función de compradores y vendedores "sería realmente absurdo que el número de vendedores creciera hasta el infinito, quedando siempre finito el número de compradores o viceversa"[37]. Sólo será Cournot, con su formulación de la ley de la demanda, el que pondrá orden a estas ideas.

El segundo autor al que nos hemos referido J.H.T. du Villard de Durand, pertenece al grupo de pioneros de la economía que se intersó por cuestiones que hoy forman parte del contenido de la llamada mamática de operaciones financieras. Su trabajo publicado en 1787 y premiado por la Real Academia Francesa, fue recogido en la obra de Baumol y Goldfeld que le consideran como "otra de las figuras moderadamente misteriosas en la temprana historia de la economía matemática"[38].

El problema que plantea du Villard de Durand es un típico problema de anualidades de amortización; es decir, amortización de un préstamo mediante una renta y, para cuya solución utiliza, correctamente, el hoy llamado método progresivo. En primer lugar considera un capital c que se ha de reembolsar, junto con sus intereses, a una tasa de interés i. El valor que corresponde al préstamo de una unidad monetaria, al final del primer año, lo representa por $1 + i = q$. Supone entonces que el préstamo c se va amortizando progresivamente a lo largo de t años, mediante una serie de pagos. Y, en cada uno de ellos, calcula el valor de la deuda residual. Para ello considera que si al final del primer año se deben intereses $c.i$ y se paga la cantidad a, la reducción del capital será $a - c \cdot i$. Y, de esta forma, el resíduo vendrá dado por

35. Ver Custodi, *Scrittori Classici,* Op. cit., Vol. XVII, Apéndice, p. LXXXIX.

36. FERRONI, P.: "Esame di Alcuni Passi Delle Meditazioni Sulla Economia Politica del Conte Pietro Verri", recopilado en Custodi, *Scrittori Classici...,* op. civ., Vol. XVII, pp. 384-399.

37. Ver FERRONI, P.: Custodi *Scrittori Classici...*, op. cit., p. 391.

38. Ver du VILLARD de DURAND, J.H.: "Recherches sur les Rentes, les Emprunts et les Remboursements", Paris and Geeva 1787, recopilado por BAUMOL, W. y GOLDFELD, S.A.: *Precursors in Mathematical Economics,* London School of Economics and Political Sciencies, 1968, pp. 151-154.

$$c - (a - ci)$$

que Villard de Durand escribe en la forma

$$cq - a$$

Al final del segundo año se debe $(cq - a)q$. Y si se reembolsa una cantidad b, la deuda residual será

$$cq^2 - aq - b$$

Ahora bien, las cantidades a, b, ..., han de ser de tal magnitud y número que al final el débito se reduzca a cero. Por lo tanto se ha de cumplir

$$cq^t - (aq^{t-1} + bq^{t-2} + \ldots.) = 0$$

Villard de Duran considera que si los pagos fuesen iguales, es decir, representen anualidades, la expresión tomaría la forma

$$cq^t - a(q^{t-1} + q^{t-2} + q^{t-3} + \ldots q^o) = 0$$

Como se puede apreciar esta expresión muestra que el valor del capital al concluir el plazo de amortización coincide en ese momento por la renta formada por las anualidades. De esta forma, haciendo uso de las progresiones geométricas, escribe la relación en la forma

$$cq^t = \frac{a(q^t - 1)}{i}$$

de la cual se puede despejar la anualidad a.

Seguidamente, formula un problema en los siguientes términos. ¿Cuál es la tasa de interés, y, a que uno tiene que prestar su capital, si se recibe de él un pago a por unidad que uno coloque nuevamente a un i por ciento, a lo largo de un periodo t?

Para resolver este problema plantea la siguiente igualdad

$$\frac{a(q^t - 1)}{i} = (1 + y)^t$$

Y a partir de aquí es donde considera un problema de máximos. En efecto, supone que si t varía, cabe preguntarse qué valor ha de tomar i, para que la expresión anterior sea máxima. Para esto diferencia la expresión, primero con respecto a t y, después, con respecto a i, obteniendo la siguiente identidad:

$$aq^t \, dt \log q - i\,(1 + y)^t \, dt \log(1 + y) = ti(1 + y)^{t-1} \, dy$$

y supone que si $dy = 0$, entonces se obtiene

$$\frac{aq^t \log q}{i} = (1 + y)^t \log(1 + y)$$

señalando que es posible calcular el valor de t mediante el uso de las series[39].

Dos aspectos se pueden apreciar en este planteamiento matemático. En primer lugar, sabe obtener la expresión diferencial , tanto de una función exponencial como de una función potencial y, en segundo lugar, señala la condición necesaria de máximo y mínimos, aunque no indica condiciones suficientes.

Estos son, que nosotros sepamos, los únicos trabajos que dentro del siglo XVIII, hacen uso de aspectos de la geometría analítica y cálculo infinitesimal, en el planteamiento de problemas de naturaleza común iniciando técnicamente el método marginalista. Sin embargo, es importante señalar que, dentro de este siglo XVIII, existen también trabajos de economía matemática –de figuras significativas como Ceva, Isnard y otros–, que plantean cuestiones en términos aritmético-algebraicos solamente, por lo cual no han sido tratados aquí, pero que, indudablemente, junto con éstos, forman el conjunto de economistas matemáticos del siglo XVIII[40].

En el comienzo del siglo XIX, pero antes de la aparición de la obra de Cournot, solamente es posible encontrar dos trabajos más que intentan aplicar los métodos de cálculo al análisis económico. El primero, publicado en 1815 por el alemán G. von Buquoy[41] y el segundo, publicado en 1824 por el inglés T.P. Thompson[42].

Desde el punto de vista del método matemático, serán tres los aspectos que llamarán la atención del lector en el planteamiento de Buquoy. El primero de ellos y quizás el más interesante, es el uso de funciones generales de una variable, así como de una simbología bastante

39. Ver BAUMOL, J.W. y GOLDFELD, R.M.: *Precursors in....*, op. cit., p. 154.

40. Ver mi Tesis Doctoral *Orígenes y...*, op. cit., donde se da una visión amplia del pensamiento aritmético algebraico de la teoría económica en sus comienzos.

41. Ver BUQUOY, G., von: *Die Theorie der Nationalwirtchaft,* (Leipzig 1815). Recogido y comentado por ROBERTSON, R.M.: *Mathematical Economics...*, op. cit., pp. 527-530.

42. Ver THOMPSON, T.P.: "The Instrument of Exchange", *Wesminister Review,* Vol. I. Recogido por ROBERTSON: *Mathematical Economics,* op. cit., pp. 527-529.

original para indicar las variaciones que experimenta una función cuando cambian sus variables. El segundo, en su clara visión tanto de las condiciones necesarias como suficientes que se han de considerar en todo problema de máximos y mínimos. Y el tercero es la insinuación de la expresión geométrica de las funciones de una variable; es decir, el reconocimiento de la importancia que ofrece la geometría analítica para la interpretación general de un problema; aunque en este aspecto Buquoy, como la mayoría de estos pioneros, no llega a materializar gráficamente la cuestión que plantea.

El primer aspecto no cabe duda que ofrece considerable interés en el desarrollo del cálculo en la teoría económica, puesto que todos estos pioneros se limitaron a utilizar relaciones concretas en el planteamiento de sus problemas, lo que no les permitía obtener leyes generales. Y, aunque indudablemente sólo Cournot –el único que realmente sabe apreciar la importancia que este aspecto tiene en el análisis de los fenómenos económicos–, no deja de ser interesante que en Buquoy se dieran ya algunas insinuaciones en este sentido. Este aspecto es el que conduce al profesor Robertson a indicar que en Buquoy se encuentra "por primera vez las instrucciones para hacer uso del concepto general de una función en la teoría económica"[43]. Sin embargo creemos que en este sentido es más un simbolismo taquigráfico, para indicar la relación entre una función y una variable, que un verdadero estudio en términos de análisis matemático acerca del comportamiento de una función en general, aspecto éste que solamente es claro y evidente en Cournot.

En efecto, para indicar que una función crece cuando crece la variable X, Buquoy usa el símbolo $f(X+)$; y para indicar que decrece, usa el símbolo $f(X-)$. La idea de función compuesta la expresa

$$F\,[f + (X+)]$$

que indica una cantidad que crece cuando crece $f(X)$, siendo X, al mismo tiempo, una cantidad creciente. Este simbolismo lo aclara con ejemplos en que intervienen magnitudes económicas que permiten apreciar la idea de relación funcional que tenía ya Buquoy.

Las condiciones necesarias y suficientes de máximos y mínimos las plantea en un problema concreto cuyo núcleo central es determinar la intensidad óptima del cultivo de un campo para la obtención de un máximo beneficio. Con el fin de resolver este problema, considera que tanto el ingreso total como el coste total del cultivo son ambos funciones de su intensidad, de modo que presentando por x esta variable, por y el ingreso total y por Y el coste total, escribe estas funciones en la si-

43. Ver ROBERTSON, R.M.: *Mathematical economics...*, op. cit., pp. 529-530.

guiente forma:

$$y = f(x)$$

$$y = F(x)$$

Establece ahora hipótesis de comportamiento. En efecto, considera que cuando la intensidad del cultivo aumenta, el ingreso total aumentará también, pero a una tasa decreciente; o, como diríamos hoy en términos matemáticos, la primera derivada de la función es positiva y la segunda negativa. De la misma forma admite que cuando aumenta la intensidad del cultivo, el coste total crece con una intensidad más que proporcional; o dicho más modernamente, la curva de coste sería convexa.

Buquoy trata de determinar cuál es el valor de x que hace máximo la función de ingreso neto que expresa en la forma

$$f(x) - F(x)$$ [44]

y observa que este valor será aquél para el cual la primera derivada sea cero y, simultáneamente, haga negativa la segunda derivada. Por lo tanto, Buquoy llega al concepto, aunque no lo enuncie en términos actuales, de que la condición necesaria de máximo exige que el ingreso marginal sea igual al coste marginal.

Considera también que si la variable independiente x se tomara en abcisas y el coste y el ingreso en ordenadas, se tendrían dos curvas que representarían las características de la función, describiendo la forma de ellas aunque no las dibuja. No obstante, es fácil observar que insinua los hoy tan familiares gráficos en la teoría económica.

El segundo intento, es decir, el del inglés T.P. Thompson, es interesante desde el punto de vista de la política monetaria, puesto que trata de hacer un estudio sistemático de las consecuencias que puede presentar un incremento del papel moneda no redimible. Cabe señalar, desde el punto de vista del método matemático, que el profesor Robertson considera a Thompson como "el primer escritor inglés que utilizó el cálculo en economía"[45].

El problema que plantea Thompson se apoya en la creencia de que el estado puede emitir papel moneda para sus gastos corrientes, a condición de recibirlos como impuestos. Ahora bien, como una parte de este papel moneda quedaría en circulación, el estado obtendría una ganan-

44. Ver ROBERTSON, R.M.: *Mathematical Economics...*, op. cit., p. 527.
45. Ver ROBERTSON, R.M.: *Mathematical Economics...*, op. cit., p. 527.

original para indicar las variaciones que experimenta una función cuando cambian sus variables. El segundo, en su clara visión tanto de las condiciones necesarias como suficientes que se han de considerar en todo problema de máximos y mínimos. Y el tercero es la insinuación de la expresión geométrica de las funciones de una variable; es decir, el reconocimiento de la importancia que ofrece la geometría analítica para la interpretación general de un problema; aunque en este aspecto Buquoy, como la mayoría de estos pioneros, no llega a materializar gráficamente la cuestión que plantea.

El primer aspecto no cabe duda que ofrece considerable interés en el desarrollo del cálculo en la teoría económica, puesto que todos estos pioneros se limitaron a utilizar relaciones concretas en el planteamiento de sus problemas, lo que no les permitía obtener leyes generales. Y, aunque indudablemente sólo Cournot —el único que realmente sabe apreciar la importancia que este aspecto tiene en el análisis de los fenómenos económicos—, no deja de ser interesante que en Buquoy se dieran ya algunas insinuaciones en este sentido. Este aspecto es el que conduce al profesor Robertson a indicar que en Buquoy se encuentra "por primera vez las instrucciones para hacer uso del concepto general de una función en la teoría económica"[43]. Sin embargo creemos que en este sentido es más un simbolismo taquigráfico, para indicar la relación entre una función y una variable, que un verdadero estudio en términos de análisis matemático acerca del comportamiento de una función en general, aspecto éste que solamente es claro y evidente en Cournot.

En efecto, para indicar que una función crece cuando crece la variable X, Buquoy usa el símbolo $f(X+)$; y para indicar que decrece, usa el símbolo $f(X-)$. La idea de función compuesta la expresa

$$F\,[f+(X+)]$$

que indica una cantidad que crece cuando crece $f(X)$, siendo X, al mismo tiempo, una cantidad creciente. Este simbolismo lo aclara con ejemplos en que intervienen magnitudes económicas que permiten apreciar la idea de relación funcional que tenía ya Buquoy.

Las condiciones necesarias y suficientes de máximos y mínimos las plantea en un problema concreto cuyo núcleo central es determinar la intensidad óptima del cultivo de un campo para la obtención de un máximo beneficio. Con el fin de resolver este problema, considera que tanto el ingreso total como el coste total del cultivo son ambos funciones de su intensidad, de modo que presentando por x esta variable, por y el ingreso total y por Y el coste total, escribe estas funciones en la si-

43. Ver ROBERTSON, R.M.: *Mathematical economics...*, op. cit., pp. 529-530.

guiente forma:

$$y = f(x)$$

$$y = F(x)$$

Establece ahora hipótesis de comportamiento. En efecto, considera que cuando la intensidad del cultivo aumenta, el ingreso total aumentará también, pero a una tasa decreciente; o, como diríamos hoy en términos matemáticos, la primera derivada de la función es positiva y la segunda negativa. De la misma forma admite que cuando aumenta la intensidad del cultivo, el coste total crece con una intensidad más que proporcional; o dicho más modernamente, la curva de coste sería convexa.

Buquoy trata de determinar cuál es el valor de x que hace máximo la función de ingreso neto que expresa en la forma

$$f(x) - F(x)$$ [44]

y observa que este valor será aquél para el cual la primera derivada sea cero y, simultáneamente, haga negativa la segunda derivada. Por lo tanto, Buquoy llega al concepto, aunque no lo enuncie en términos actuales, de que la condición necesaria de máximo exige que el ingreso marginal sea igual al coste marginal.

Considera también que si la variable independiente x se tomara en abcisas y el coste y el ingreso en ordenadas, se tendrían dos curvas que representarían las características de la función, describiendo la forma de ellas aunque no las dibuja. No obstante, es fácil observar que insinua los hoy tan familiares gráficos en la teoría económica.

El segundo intento, es decir, el del inglés T.P. Thompson, es interesante desde el punto de vista de la política monetaria, puesto que trata de hacer un estudio sistemático de las consecuencias que puede presentar un incremento del papel moneda no redimible. Cabe señalar, desde el punto de vista del método matemático, que el profesor Robertson considera a Thompson como "el primer escritor inglés que utilizó el cálculo en economía"[45].

El problema que plantea Thompson se apoya en la creencia de que el estado puede emitir papel moneda para sus gastos corrientes, a condición de recibirlos como impuestos. Ahora bien, como una parte de este papel moneda quedaría en circulación, el estado obtendría una ganan-

44. Ver ROBERTSON, R.M.: *Mathematical Economics...*, op. cit., p. 527.
45. Ver ROBERTSON, R.M.: *Mathematical Economics...*, op. cit., p. 527.

cia. Encontrar el período de tiempo para el cual esta ganancia fuera máxima, es, en esencia, lo que se propone. Pero, como partidario de la teoría cuantitativa, Thompson sabe que si el estado emite durante un cierto período de tiempo una cantidad de papel moneda muy superior a la que recibe como impuestos, el nivel de precios se elevaría, ya que admite que los precios de los bienes están determinados por la cantidad de billetes en circulación, una vez deducida la cantidad empleada en el pago de los impuestos.

En el planteamiento de su problema Thompson elabora la hipótesis de que en principio, todos los medios monetarios consisten en papel moneda que circula a la par. Posteriormente, el estado continúa emitiendo, diariamente, un cierto número de billetes superior al que recibe como pago de los impuestos. Por tanto, las variables relevantes en su problema son las siguientes: p, representa a la emisión legal diaria, equivalente al pago diario de los impuestos; s representa la emisión diaria que sobrepasa a p. Esto es, la emisión sobrante o superflua; t, significa el número de días en cada uno de los cuales tiene lugar esta emisión; finalmente, z representa una fracción que expresa la depreciación.

De acuerdo con esto, el poder de compra que corresponde a la emisión s para un período infinitésimo de tiempo dt, se podría expresar por

$$sdt - (sz)dt$$

Ahora bien, como p también se deprecia en el período dt, entonces, el valor de esa depreciación sería $pz(dt)$. Por tanto, representando por dG la ganancia infinitamente pequeña en el período dt, Thompson escribe la relación siguiente:

$$dG = sdt - (s + p)\,dt\,.\,z$$

Indica que si esta expresión se integrase, se podría formular el valor de G como una función de las demás variables; pero en realidad, lo que él pretende, es encontrar el valor de t que hace máximo a G. Y para que esto tenga lugar, es necesario que se verifique que $dG = 0$. Esta condición necesaria de máximo es la que permite escribir su fórmula básica en los términos

$$(s + p)\,z\,dt = s\,dt$$ [46]

y despejar el valor de t que lahace máxima; es decir, el número máxi-

46. Ver ROBERTSON, R.M.: *Mathematical Economics...*, op. cit., p. 528.

mo de días en los cuales puede tener lugar la emisión excesiva.

Esto, como es fácil observar, es el establecimiento del principio de equidad marginal apoyado en las condiciones necesarias para hallar los extremos de una función que también aparece en Buquoy.

En resumen, estos son los autores que, antes de von Thunen y Cournot, hicieron uso de método que, como dijimos al comienzo de este trabajo, constituyen la esencia del análisis marginalista.